固有双有理幾何入門 (代数幾何とその近傍)

飯高, 茂

数理解析研究所講究録
273巻 1976年 111-134

固有双有理幾何入門

東京大学 理 飯高茂

1. 俗にいう双有理幾何は，代数函数体の非特異射影モデルをとり，そこで双有理不変な性質を究明して，代数函数体を研究しようというものである。そこでは，正則型式を色々にとり，各種の種数が定義され，代数曲面の双有理同値による分類がなされている。代数曲面の分類の結果は簡明で実に美しい，しかし証明は極めて技巧的で見通しが悪く，甚だ評判が悪い。曲面の分類論の構造を解明し，できうべくば，一般の代数多様体の分類の基本構造を確立しようというのが，小平次元の理論であるが，それは非常に困難の多い仕事で，上野健二の極めて精力的な労作が進行中である。

2. 射影的とか完備とかいう条件をおとして，分類理論をつくることは，決して新しい珍奇な考えでは無い。たとえば，

(1) $\mathbb{P}^1$ から3点以上ぬく，又は，楕円曲線から点をぬいた，代数的開Riemann面は，$g \geq 2$ の代数曲線と類似の性

層をもつ．例えば，自己同型は有限群であり，普遍被覆面として上半平面をもつから，双曲型である．等．

(2) $\overline{V}$ をコンパクト複素多様体，$\overline{D}$ を reduced 因子かつ正規交叉型とし，$\kappa(\overline{K}+\overline{D}, \overline{V})=n$ とする．このとき $\Delta=\{|z|<1\}$，$\Delta^*=\Delta-\{0\}$ とおくと，非退化正則写像

$$f:(\Delta^*)^n \longrightarrow \overline{V}-\overline{D} \qquad (n=\dim V)$$

は有理型写像

$$\overline{f}: \Delta^n \longrightarrow \overline{V}$$

に延長できる。　　　　　（小林・落合の定理）

これは西井の定理で，$\overline{D}=\phi$ のときが拡張されて，$V=\overline{V}-\overline{D}$ が"双曲型的"であることを示している．$\overline{D}$に正規交叉性を仮定しないと正しくない．

正規交叉という条件は一見人為的にみえるが，$V=\overline{V}-\overline{D}$ からすると，実は自然であり，複雑な特異性をもつ代数境界 $\overline{V}-V$ をモノイダル変換で改善して，自然的なものにすることこそ必要なのである．

(3) $\mathbb{P}^2$ から，正規交叉型の直線を4本以上除くとき，それをSとすると，$\mathrm{Aut}(S)$ は何か．それは有限群であろう，というのが，若林氏の筆者にスクールバスの中で又編集委員会の末席での雑談中でお問うた問題であった．直線から3

点以上ぬけば自己同型は有限群になるから，このときも正しそうである。実際正しいことを若林氏は2次変換論を巧みに使って証明し，より一般の形をえている。筆者は独立に環論的に $S = \mathrm{Spec}\, k[x, y, 1/\ell_1, \ldots, 1/\ell_r]$ の閉点を使って，環の準同型は単数を保つことを利用して，夏休み(1974)をかなり消費して，$\varphi: k[x, y, 1/\ell_1, \ldots, 1/\ell_r] \longrightarrow k[x, y, 1/\ell_1, \ldots]$ は，退化しない限り，線型で従って，自己同型でそれらは有限群をなすことを確認した。φ が $1:1$ であることはうまく利用できず，結果として，であることが少し奇妙な気もしたのをよく覚えている。

(4) (2)の議論は第2種例外曲線を論ずるとき基礎になる。また，$\mathbb{P}^2 - \bar{D} = V$ について，$\bar{D}$ の特異点をはずすことを行なおう。

$$
\begin{array}{ccc}
\bar{V}^* & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \mathbb{P}^2 \\
\cup & & \cup \\
\bar{D}^* & & \bar{D}
\end{array}
$$

$\bar{D}^* = \bar{\mu}^{-1}(\bar{D})$: 正規交叉型因子

と2次変換をくりかえし，$\kappa(\bar{K}^* + \bar{D}^*, \bar{V}^*)$ を計算すると，これは $\mathbb{P}^2 - \bar{D}$ のみにより，$\bar{V}^*$ の選択に依存しないことがわかる。のみならず $\dim \Gamma(\bar{V}^*, \mathcal{O}(n(\bar{K}^* + \bar{D}^*)))$ も依然と

して選択によらない．だから $\bar{\kappa}V = \kappa(\overline{K}^* + \overline{D}^*, \overline{V}^*)$,
$\overline{P}_m V = l(m(\overline{K}^* + \overline{D}^*))$ とかいてよい。$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2 - D) < 2$
なら，(2)でのべた接続定理，すなわち，Picardの大定理を確認しえたなれら，$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^1 - D) < 1 \Leftrightarrow D = p$ or $p+q$ の一般化と考えられる．それは，例外的であり，特殊な構造をもつであろう．それを求めよう?!

(5) $z^m = f(x, y)$ により $\pi : S \to \mathbb{P}^2$ と m重ヒフクをつくる。Sが双曲型なら，$B = \pi(R_\pi)$，とおくとき，$\mathbb{P}^2 - B$ も双曲型と考えられる。これも $\mathbb{P}^2 - B$ の分類を期待させる何かであろう。

(以上でまえおき，おわり)．

3．Vを非特異n次元とし，$\overline{V}$をその非特異コンパクト化，$\overline{D} = \overline{V} - V$ を単純正規交叉型とする．層 $\Omega^1 \log \overline{D}$ を $\overline{V}$上に定義する：i) $\Omega^1 \log \overline{D} \subset \Omega^1(\overline{D})$,

ii) $\forall p \in \overline{D}$ で，$(z_1, \cdots, z_n)$ なる局所パラメターを $z_1 \cdots z_s = 0$ がpの周りで$\overline{D}$を定義するとしてきめる．ωをpでの芽とすると，

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} a_i(z) \frac{dz_i}{z_i} + \sum_{j=s+1}^{n} b_j(z) dz_j, \quad a_i, b_j \in \mathcal{O}_{\overline{V}, p}$$

とかける．

$\Omega^1 \log \overline{D}$ は分論位数nの局所自由層であって，

$$\Omega^q \log \bar{D} = \bigwedge^q \Omega^1 \log \bar{D},$$

$$T_i(V) = \Gamma(\bar{V}, \Omega^i \log \bar{D}),$$

$$T_{m_1,\cdots,m_n}(V) = \Gamma(\bar{V}, (\Omega^1 \log \bar{D})^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes (\Omega^n \log \bar{D})^{\otimes m_n})$$

とおく.

対数微分の性質により,

$f: V_1 \longrightarrow V_2$ について, ωをしま戻して,

1) $T_i(V_2) \xrightarrow{f^*} T_i(V_1)$,

1)′ $T_{m_1, m_2, \cdots}(V_2) \longrightarrow T_{m_1, m_2, \cdots}(V_1)$

がひきおこされて,

命題 1 i) f = 支配的なら, f^* は 1:1,

ii) f = 固有双有理正則なら, f^* は同型.

そこで

定義. $f: V_1 \longrightarrow V_2$ が強有理写像 を

α) f は 有理写像,

β) f は ある固有双有理正則写像 $\mu: V_1^* \longrightarrow V_1$ により

$f \cdot \mu$ を正則にできる,

の2条件で定義する.

$$\begin{tikzcd} & V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \\ V_1^* \arrow[ur, "\mu"] \arrow[urr, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

すると

$$\begin{tikzcd} T\underline{\quad}(V_1) \arrow[d, "\wr\ \mu^*"'] & T\underline{\quad}(V_2) \arrow[dl, "g^*"] \\ T\underline{\quad}(V_1^*) & \end{tikzcd}$$

をえるから $f^* = \mu^{*-1}\cdot g^* : T\underline{\quad}(V_2) \longrightarrow T\underline{\quad}(V_1)$ が定義できる.

一般の代数多様体 V については，その非特異モデル (V^*, μ)，いいかえると，V^* は非特異，μ は固有双有理正則，を用いて，$T\underline{\quad}(V) = T\underline{\quad}(V^*)$ と定義しよう．勿論 V^* をきめても $T\underline{\quad}(V^*)$ は確定しないし，V^* すら1意ではないが，V での恒等写像からひきおこされた極めて標準的線形写像で $T\underline{\quad}(V^*$ は連関する故，本質的には1意と考えられる．$T\underline{\quad}(V)$ の元を V の対数型式という.

f, f^{-1} がともに強双有理のとき f を固有双有理写像といい，$f^{*}: \overline{T}(V_2) \xrightarrow{\sim} \overline{T}(V_1)$ である．

固有双有理写像 $f: V_1 \longrightarrow V_2$ のあるとき，V_1 と V_2 とは，固有双有理同値と考える．これが，固有双有理幾何の根本概念である．

注意 Remmert は有理型写像を，上記の強有理写像を解析の範囲で考えて用いている．有理写像に対するものは，そこでは，弱有理型写像とよばれている．

4.

$$\overline{P}_{m_1, m_2 \cdots}(V) = \dim \overline{T}_{m_1, m_2, \cdots}(V),$$
$$\overline{q}_i(V) = \dim \overline{T}_i(V),$$
$$\overline{P}_m(V) = \dim \overline{T}_{0,0,\cdots,m}(V),$$
$$\overline{p}_g(V) = \overline{P}_1(V).$$

等とおき，対数的種数，…… とすべて対数的なる接頭語をつけてよぶ．一方

$$P_{m_1, m_2, \cdots}(V) = P_{m_1, m_2, \cdots}(\overline{V}), \quad \kappa V = \kappa \overline{V},$$

とおき，これらも合せ用いるから，注意を充分にすべきである．

$\overline{P}_m(V)$ から

対数的小平次元（Logarithmic Kodaira dimension）

$\overline{\kappa}(V)$ が定義され，これが最も重要である．

5.

例1. V を非特異曲線とする:

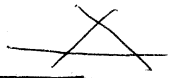
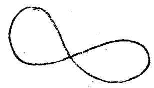
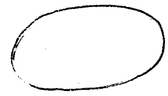
$\bar{\kappa}(V)$	V	$\bar{g}$
$-\infty$	$\mathbb{P}^1$, A	0
0	elliptic, G_m	1
1	残り	1 又は ≥ 2

注意 $\bar{g}(V)$ では上記は区別しきれない。$\bar{\kappa}V=1$ に、$\bar{g}=g=1$ の非コンパクトのものも入る。小平次元の本質的性格のよさが、ここで既に表出している。

例2. $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の正規交叉型の因子を $\bar{D}$ とする。このとき、

$\bar{\kappa}$	$d=\deg\bar{D}$
$-\infty$	$d<n+2$
0	$n+2$
n	$d>n+2$

$n=2$ のとき $\bar{\kappa}=0$ なる $\bar{D}$ は次の4種に限る:その $\bar{g}$, $\dim \mathrm{Aut}(V)^0$ も合せておくと、

$\bar{q}$	$\dim \mathrm{Aut}(V)^\circ$	$\bar{D}$
2	2	
1	1	
0	0	
0	0	

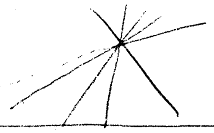
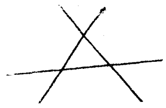
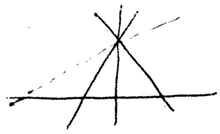
今回 $n=0$ の極小代数曲面の分類を心得ている人は，それとの余りの類似に興奮を抑えきれないに違いない．K3, Enriques, hyperelliptic, abel, という4種の分類とピタッと対応している。

$n=3$ も試みると，

$\bar{q}$	$\dim \mathrm{Aut}(V)^\circ$	$\bar{D}$
3	3	一枚を∞平面，残りは各座標平面
2	2 ?	$L+L+Q$
1	0 ?	Q_1+Q_2
1	1 ?	$L+C^3$
0	0 ?	K3 や double curve をもった4次曲面，……

$\dim \mathrm{Aut}(V)^0$ の計算はかなり大変で，殆んどできていない．

例3．$\bar{D}$を$\mathbb{P}^2$内の直線の和としての因子とする．

$\bar{\kappa}$	$\bar{D}$	$\mathbb{P}^2-\bar{D}$
$-\infty$		$\mathbb{C}^1\times\Gamma$
0		$\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$
1		$\mathbb{C}^*\times\Delta$，$\bar{\kappa}\Delta=1$
2	残り	

代数曲面のκによる分類の結果をおもいだすと，

κ	S
$-\infty$	$S\sim\mathbb{P}^1\times\Gamma$（双有理）
0	Sはアーベル曲面又はK3，それらの退化
1	$S\to\Delta$，elliptic曲面
2	残り

これも，わくわくさせる程類似が著しい．この類似をつきつめれば，固有でない対象に固有双有理幾何ができてよさそうである．

例4. $T=\mathbb{C}^{*n}$ としT内の因子を $\bar{D}$ $(>0$, reduced$)$ とする.

$\bar{\kappa}$	$T-D$
0	T
$\bar{\kappa}$	$T_1\times(T_2-D_2)$, $\bar{\kappa}(T_2-\bar{D}_2)=\bar{\kappa}=\dim(T_2-\bar{D}_2)$
n	残り

これは, 一般の因子について, 極めて簡明な $\bar{\kappa}$ による分類を与えている.

例5. $\bar{D}$ を $\mathbb{P}^n$ 内の超平面の和とすると,

$$\mathbb{P}^n-\bar{D}=\mathbb{C}^{\alpha}\times\mathbb{C}^{*\beta}\times V_1,$$

V_1 は同じ型の双曲型.

即ち, 例3が一般化され, 分類論が一息にできている.

例4, 例5の証明には, 対数的小平次元の基本定理が有効に用いられ, それらを心得ておけば, 見通しのよい, とてもとてもやさしい証明ができる. しかし, これらはアフィン多様体なので, 環論的にも取り扱えるはず.

$$k[x_1,\dots,x_n,x_1^{-1},\dots,x_n^{-1},1/g]=R$$

を考える. そのとき

$$\dim \mathrm{Aut}(R)\leq n$$

をまず示し，もし＝なら 実は g は単数になることを確かめる．またもし $a = \dim \mathrm{Aut}(R)$ なら，

$$R = k[\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_1^{-1}, \ldots, \xi_m^{-1}, 1/g_1][\zeta_1, \ldots, \zeta_a, \zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_a^{-1}],$$

$(a + m = n)$

とかけることを証明しさえすればよい．できることはわかっているから，精神力だけでできるかもしれない．?!!

例6. $\mathbb{P}^2$ 内の因子 $\bar{D}$ (reduced) を考えるとき，

$$\bar{p}_g(\mathbb{P}^2 - \bar{D}) = g^*(\bar{D}),$$

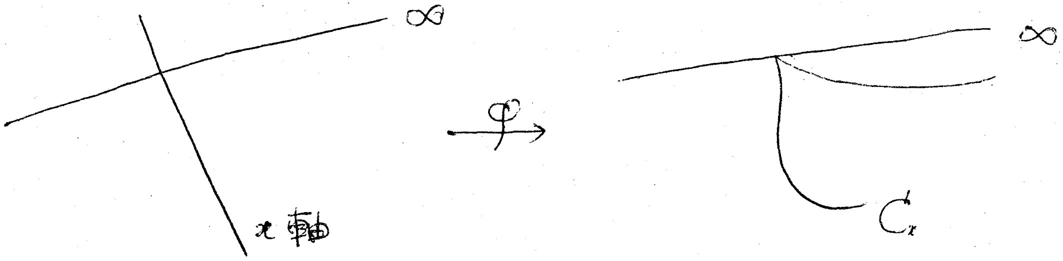
$g^*(\bar{D})$ は $\bar{D}$ を正規交叉型 $\bar{D}^*$ に直し，そのグラフをつくるとき，$\sum g(\bar{D}_i^*) + h(\Gamma)$，$h(\Gamma)$ = グラフ Γ の cyclotomic number.

例えば $\bar{D}$ が既約のとき，

$$\bar{p}_g(\mathbb{P}^2 - \bar{D}) = 0 \iff \bar{D} \text{ は有理曲線で，その特異点は単一素点的．}$$

しかし $\bar{P}_m(\mathbb{P}^2 - \bar{D})$ はこのように簡明ないいかえを許さないから，大変である．しかし

上の条件をみたす $\bar{D}$ について，特異点が2個以下なら，$\bar{\kappa} = -\infty$ は確認できる? こういった例をつくることは，やさしい．

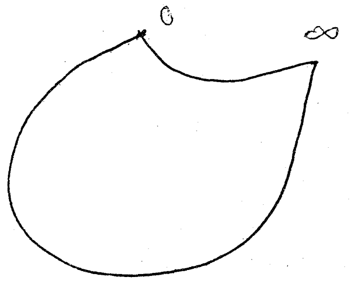


$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-\infty-x軸) = -\infty$ であり、$\mathbb{P}^2-\infty$ の自己同型は極めて複雑。そこで、それを φ として、

$$\mathbb{P}^2-\infty-x軸 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2-\infty-\varphi(x軸)$$

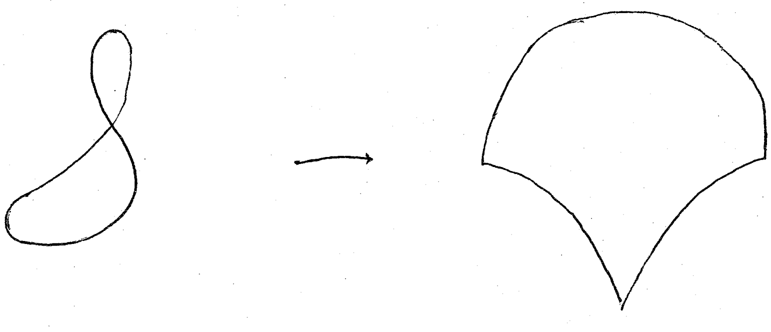
ができる。$\bar{\kappa}(\mathbb{P}^2-\varphi(x軸)) = -\infty$.

また $x^p=y^q$ を射影化してみると、2点の特異点をもつ



それをとりさると $\mathbb{C}^*$ になる。

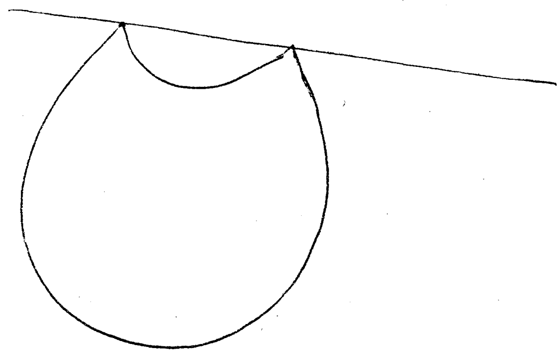
しかし、通常2重点をもつ3次曲線の双対曲線は4次で3個の尖点をもつ。



かぶとがに型。$\bar{P}_g=0$ だが $\bar{\kappa}=2$ となることが、計算できる。

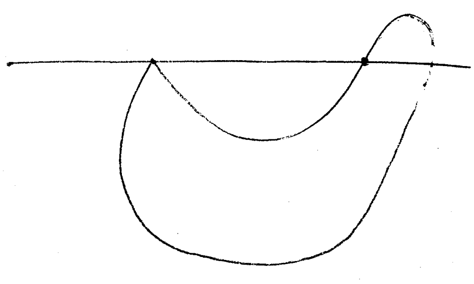
$\bar{\kappa}=0$ の型も結構多い

$V=\mathrm{Spec}\,k[x,y,1/x^2y^2-1]$ は $\bar{q}=1$, $\bar{\kappa}=0$ をみたし、$\dim \mathrm{Aut}(V)^\circ=1$ である。これを図示すると、



洗濯ひもに、おしめを2個のクロスピンでとめると風でゆれてこんな形ができる。

強いてVの類似を、さがすと、$b_1=3$, $K=0$ の小平曲面は $m\in\mathbb{Z}$ でパラメトライズされるから、にていて、これだ!といいたくなる。しかし、M1の対馬氏はもう少し変な例をもつくった $\mathrm{Spec}\,k[x,y,1/x(xy-1)-\lambda]$



これも $\bar{\kappa}=0$ だが，$\dim \mathrm{Aut}=0$．実に $\mathrm{Aut}\,V=\{1\}$ の例という。

注意　$\mathbb{P}^2-D\simeq\mathbb{P}^2-D'$ でも D と D' は一見全く異なることが多いから，D' は複雑でも D は簡単になることがしばしばある．例えば g を既約 $\in\mathbb{C}[x,y]$ とし，$\bar{\kappa}(\mathbb{A}^2-V(g))=-\infty$ なら $\mathbb{A}^2-V(g)=\mathbb{A}^1\times\mathbb{C}^*=\mathbb{A}^2-V(\xi)$，$\mathbb{A}^2=\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\xi,\eta]$．

この意味で変換論をさけることはできない。

例 7.　$\mathbb{P}^2$ 内の Zariski 開集合は非常に複雑で，それは，$\mathbb{P}^2$ が $\kappa=-\infty$ だからである．

$\kappa\bar{V}\geq 0$ であれば，$\bar{D}\subset\bar{V}$ は，どんな特異点をもつ図形としても

$$\bar{\kappa}(\bar{V}-\bar{D})=\kappa(\bar{K}+\bar{D},\bar{V})$$

で計算できる．$\bar{V}$ がアーベル多様体なら，例4と類似のことができる．

6. 対数的小平次元の基本定理をのべよう. やさしい注意から.

◎ V_1, V_2 をともに n 次元 $f: V_1 \longrightarrow V_2$ を支配的強有理写像とすると, $\overline{P}_m V_1 \geqq \overline{P}_m V_2$, $\overline{q} V_1 \geqq \overline{q} V_2$, $\overline{\kappa} V_1 \geqq \overline{\kappa} V_2$.
とくに V_1 が V_2 の Zariski 開集合なら, これが結論できる.

◎ V_1, V_2 を n, m 次元とすると,

$$\overline{q}(V_1 \times V_2) = \overline{q} V_1 + \overline{q} V_2,$$
$$\overline{\kappa}(V_1 \times V_2) = \overline{\kappa} V_1 + \overline{\kappa} V_2,$$
$$\overline{P}_m(V_1 \times V_2) = \overline{P}_m(V_1) \cdot \overline{P}_m(V_2).$$

定理1. $\overline{\kappa} V = \overline{\kappa} \geqq 0$ とする. 固有双有理正則写像 μ : $V^* \longrightarrow V$, 既約 $\overline{\kappa}$ 次元構成集合 W, $f: V^* \longrightarrow W$ という全射正則写像があり, その一般のファイバー V_w^* は既約で,
$\overline{\kappa}(V_w^*) = 0$.

定理2. $V_1 \longrightarrow V_2$ を étale ヒフクとする. このとき,

$$\overline{\kappa} V_1 = \overline{\kappa} V_2.$$

定理3. $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ を支配的とする f の一般ファイバーの連結成分を $V_{1,u}$ とかくと,

$$\overline{\kappa} V_1 \leqq \overline{\kappa} V_{1,u} + \dim V_2.$$

これらは, 簡明な事実で証明も難しくはないが, 諸例の研

究に於ても極めて有効である.

7. いくつかの定理をのべる.

定理4. $\overline{\varkappa} V \geq 0$ をみたす非特異多様体を V とする $f: V \to V$ を支配的とすると, f は étale になる.

次の定理は少し歴史をもっている.

定理5. さらに $\overline{\varkappa} V = n$ とすると f は同型. もう少し条件をかえて.

V_1, V_2 を n 次元 $\overline{P}_m V_1 = \overline{P}_m V_2$ をみたし $\overline{\varkappa} V_2 = n$ とする. $f: V_1 \to V_2$ を強有理で支配的とする このとき f は, 双有理.

$n=1$, コンパクト H. Weber 1853 ?

$n=2$ 〃 Andreotti 1956 ?

n 〃 K. Peters 1968 (Archiv)

また この定理は, 直線の補集合の研究で, 久年前に着ねのであった奇妙な事実を説明する.

アフィン環にうつすと, 次のことを例えば意味する

$$k[x, y, 1/x^p y^q - 1] \xrightarrow{\varphi} k[x, y, 1/x^p y^q - 1]$$

をとると, $f = \varphi(x)$, $g = \varphi(y)$ とかくとき

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = c(x^p y^q - 1)^m.$$

のみちうが $\alpha^p\beta^q \neq 1$ なる α, β をとると $f=\alpha, g=\beta$ には交が交換がある．だろうか？ 正しい 3月10

定理6　$\bar{\kappa} V \geq 0$ とすると，$\mathrm{Aut}(V)^0$ は，準Abelの様体

定理7　$\bar{\kappa} V \geq 0$, $\dim \mathrm{Aut}(V)^0 \geq \dim V$ なら $V \doteq \mathrm{Aut}(V)^0$ は準Abelの様体．

定理8　$\bar{\kappa} V = \dim V$ なら，$f: V \to V$ を強有理支配的とすると，固有双有理になり，これらのつくる群 $\mathrm{PBir}\, V$ は有限群となる．

この定理は，$\bar{\kappa} V = \dim V$ が一般型であることの証拠である．

✱ $\bar{V}$ 完備非特異，$\supset \bar{D}$ を正規交叉で，$\overline{K+D}$：アンプルとしよう．このとき $f: V = \bar{V} - \bar{D}$ ↻ ，支配的．なら f は $\bar{V}$ の自己同型に延長される．

$\bar{V} = \mathbb{P}^n$，$\bar{D}$ 正規交叉の超平面とすると，すぐに応用できて，2.(3) でのべた例の一般的証明をあたえる．

✱の証明は極めて簡単であって，対数 n-形式が f^* で対数 n-形式にうつることに注目しさえすればよい．

8. いくつかの応用をのべる.

(i) $f \in k[x_1, \dots, x_n]$,

$$\overline{\kappa}\ \mathrm{Spec}\, k[x_1, \dots, x_n, 1/f] < n$$ とする.

任意の m をとり, 代数函数体 M:

$$y^m = f(x_1, \dots, x_n)$$

をつくると, これの小平次元 $= -\infty$.

証明 $\mathbb{P}^n$ の M 内での正規化を $\overline{V}$ とすると, $\varphi: \overline{V} \to V$ は covering. $\overline{V}$ の特異点を除去し, また $\overline{V}$ とおく. $\varphi(R_\varphi)$ は $L + V(f)$ (L は ∞ 平面) に入る. これを B とおき, $\varphi^{-1}B$ が正規交叉になるようにモノイダル変換をくり返しておく.

$$0 \leqq \kappa V = \kappa \overline{V} \leqq \overline{\kappa}(\overline{V} - \varphi^{-1}(B))$$

$$= \kappa(\overline{K} + \varphi^{-1}B, \overline{V})$$

$$\geqq \kappa(\varphi^{-1}B, \overline{V}) \qquad (\kappa(V) \geqq 0 \text{ により})$$

$$= \kappa(\varphi^* B, \overline{V}) = \kappa(B, \mathbb{P}^n) = n.$$

一方 $\overline{\kappa}(\overline{V} - \varphi^{-1}(B)) = \overline{\kappa}(\mathbb{P}^n - B) = \overline{\kappa}(\mathbb{A}^n - V(f)) < n$.

これで矛盾した.

以上の計算で, $\kappa(D, \overline{V})$ についての次の簡明な事実を用いている.

1) $\kappa(D_1, \overline{V}) \geqq 0, \dots, \kappa(D_r, \overline{V})$, $p_1, \dots, p_r > 0$ なら,

$$\kappa(\sum D_j, \overline{V}) = \kappa(\sum p_j D_j, \overline{V}).$$

2) $\kappa(D, \bar{V}) \geq 0$ なら

$$\kappa(D+E, \bar{V}) \geq \kappa(E, \bar{V}),$$

3) $f : \bar{V}_1 \longrightarrow \bar{V}_2$ に対して, $\bar{D}$ が effective なら

$$\kappa(f^* \bar{D}, \bar{V}_1) = \kappa(\bar{D}, \bar{V}_2)$$

一方

$$= \kappa(\bar{f}^{-1} \bar{D}, \bar{V}_1). \quad \text{ここに } \bar{f}^{-1}\bar{D} = (f^*\bar{D})_{red}.$$

こういう κ の算数計算を κ-算法という.

(ii) V を全く一般の代数多様体とする. $V' \longrightarrow V$ を V の正規化とするとき,

$$P_m^+(V) = \bar{P}_m \operatorname{Reg} V', \quad \kappa^+(V) = \bar{\kappa} \operatorname{Reg} V',$$
$$P_m^\#(V) = \bar{P}_m \operatorname{Reg} V, \quad \kappa^\# V = \bar{\kappa} \operatorname{Reg} V$$

等とおき, 特異小平次元という. κ^+ を正規特異小平次元という.

V が特異のとき, $\mu : V^* \longrightarrow V'$ をその非特異化とする:

$$\begin{array}{ccccc} V^* & \xrightarrow{\mu} & V' & \longrightarrow & V \\ \cup & & \cup & & \\ \mu^{-1}\operatorname{Reg} V' & & \operatorname{Reg} V' & & \end{array}.$$

これにより $\bar{\kappa}(\mu^{-1}\operatorname{Reg} V') = \bar{\kappa} \operatorname{Reg} V' = \kappa^+ V'$ 一方

$\bar{\kappa}(\mu^{-1}\operatorname{Reg} V') \geq \bar{\kappa} V^* = \bar{\kappa} V$. よって

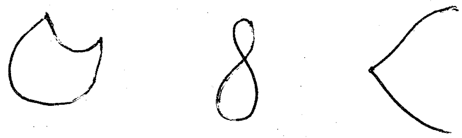
$$\bar{\kappa} V \leq \kappa^+ V \leq \kappa^\# V.$$

κ^+, $\kappa^\#$ により, V の特異点こみの構造が解明されることが期待される. たとえば,

定理　$\kappa^+ V \geq 0$, $\dim \mathrm{Aut}(V)^0 \geq n = \dim V$ ならば, V は準Abel多様体.

とくに V が完備のとき, V は Abel 多様体が結論づけられる.

$\dim V = 1$ とすると,

$\kappa^\#$	
$-\infty$	$\mathbb{P}^1$　$\mathbb{C}$  one cusp
0	$\mathbb{C}^*$, elliptic curve 
1	残り

このようにして $\bar{\kappa} \leq \kappa^\#$ が大きくなるだけ, より構造が複雑化する.

$\kappa^\# V = n$ ならば V は $\mathrm{Aut}(V)$: 有限群をみたすから, たとえば特異超曲面 $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$ の $\kappa^\#(V)$ を計算する

ことは面白いだろう.

例 $\bar{V}$ $z_0^d+z_1^d+z_2^d=0$ in $\mathbb{P}^3$, $V=\bar{V}-\infty$平面

$\kappa^+(V)$	d
1	≥ 4
0	3
$-\infty$	$\leqq 2$

, $\bar{\kappa} V=-\infty$

$\kappa^+\bar{V}=-\infty$

$\mathrm{Aut}(V)$ として Vの母線方向に G_m が作用する.

$\kappa^+V=1$ は, $\mathrm{Aut}(V)^0$ は実はそれしかないことを意味する. $\kappa^+V=0$ のとき $\dim \mathrm{Aut}(V)^0=2$ なら, Vは準Abel多様体となり矛盾. よって $\dim \mathrm{Aut}(V)^0=1$. しかし $\kappa^{\#}\bar{V}=-\infty$. ↓Note

たとえば特異4次曲面 S で $\kappa^{\#}S=0$ のものを決定することは, 全く興味なしとしない.

一般に, X^{n+1} を非特異とし, $V\subset X^{n+1}$ を完備n次元多様体, $\Pi_m(V/X)=\dim H^0(V, m(K_X+[V])|V)$ とおくと,

$$\Pi_m(V/X)\geqq P_m^{\#}(V)\geqq P_m(V)$$

が成立つ. $n=2$ のとき, $\kappa V\geqq 0$ かつ,

$\forall m$ $\Pi_m(V/X)=P_m(V) \iff V$ は negligible 特異点のみ,

が成立しているのだった.

① 話ではまちがえていて赤尾氏に教わる.

応用例3をあげるために，小平次元の他のvariationsを与える必要がある．$\overline{D}$ はやはり正規交叉型として，

$$\underline{\varkappa} V = \underset{\alpha > \beta > 0}{\mathrm{Max}}\ \varkappa(\alpha \overline{K} + \beta \overline{D}, \overline{V}),$$

$$\overline{\varkappa} V = \underset{0 < \alpha < \beta}{\mathrm{Max}}\ \varkappa(\alpha \overline{K} + \beta \overline{D}, \overline{V})$$

とおくとこれらは，Vのみに依存して，$\underline{\varkappa} V \leq \overline{\varkappa} V \leq \bar{\bar{\varkappa}} V$．

1. $\underline{\varkappa} V \geqq 0$ なら $\underline{\varkappa} V = \overline{\varkappa} V = \bar{\bar{\varkappa}} V$,

2. $\underline{\varkappa} V = \dim V \iff \overline{\varkappa} V = \dim V$,

3. $\overline{V}_1$ を V の他のコンパクト化で，$\overline{D}_1 = \overline{V}_1 - V$ は任意の特異性を許すとしよう：

$$\bar{\bar{\varkappa}} V = \underset{0 < \alpha < \beta}{\mathrm{Max}}\ \varkappa(\alpha \overline{K}_1 + \beta \overline{D}_1, \overline{V}_1).$$

いいかえると，$\bar{\bar{\varkappa}}$ の計算には，正規交叉の条件が不要になる．これらの証明は概念さえ確定すればやさしい．$\underline{\varkappa} V$は酒井の最近のコンパクトでない多様体上の解析的研究から自然に導かれて定義した，酒井の意味の小平次元と一致する．

たとえば，$\mathbb{P}^n - D = V$ とする．

$$\underline{\varkappa} V \geqq 0 \quad なら \quad \underline{\varkappa} V = \bar{\bar{\varkappa}} V = \varkappa(K_{\mathbb{P}} + D, \mathbb{P}) \geqq 0$$

だから，$\deg D \geqq n+1$．$>$ なら $\underline{\varkappa} = \overline{\varkappa} = n$．さて $\deg D = n+1$ とすると $\bar{\bar{\varkappa}} V = \varkappa(K_{\mathbb{P}} + \beta D, \mathbb{P}^n)$ $\beta \to \infty$ とすると矛盾．よって，次の結果をうる．

$$\underline{\kappa} V = \begin{cases} n & \Longleftrightarrow \quad \bar{\kappa} V = n. \\ \\ -\infty \end{cases}$$

これによると次のはっきりとした応用ができる：

Dを既約，$\bar{\kappa} V < n$ とすると，Residue により，

$$\bar{P}_m V \leq P_m^{\#}(D), \quad \bar{\kappa} V \leq \kappa^{\#} D,$$

が成立つ？ また $\bar{P}_q V$ は極めて組合せ論又は高次のグラフ的解釈をもつ．（対数的算術種数）

（おわりに）

紙数の関係で，準Albanese写像などの話題を割愛した．しかし，代数多様体の構造が，なんとなくわかるかのような期待をどうかするともたされる幻想をもたなくなるのは，寂しいことではないだろうか。　　2月27日　終り　京都にて

「そして追記」対数的小平次元のきっかけとなったことどもを思い出して，序にかいているうちに，ひどく感傷的になってきた．題していわく，固有双有理幾何入門．この門に入っていき，さらに深く入りこむと，どんな世界があるのだろうか．それは，勿論わからないが，消失定理はもはや消失し，コホモロジーも水づけとなり，スキームさえもどこかにゆずりわたした，そんな世界のような気がする。